Coniques

Courbes d'équations cartésiennes polynomiales de degré 2 en x, y. [0]



Déterminer la nature de la conique C dont l'équation est donnée ci-dessous dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le cas échéant l'axe focal, l'excentricité, le(s) foyer(s) et le(s) directrice(s) associées.

a) $x^2 + y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 - xy = 9$; c) $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$;

d) $(2x + 3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$; e) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$; f) $4x^2 + 10\sqrt{2}xy - y^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$.

Solution :

[0] [ucon0019] v1.01 Dany-Jack Mercier (le a) est dans Serfati IV 5.3 p156)

a) Méthode classique :

$$q(x,y) = x^2+y^2+2xy = (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix}1-X & 1\\ 1 & 1-X\end{vmatrix} = X^2-2X = X(X-2)$$

$E(0)$: $x+y=0$ est une droite de vecteur dir. $\vec{e}'_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$E(2)$: $-x+y=0$ " " $\vec{e}'_2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, c'est la 1-bissectrice

Posons $e' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ et $P = P_e^{e'}$ la matrice de passage de $(\vec{i},\vec{j})$ vers e'.

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{R_{-\frac{\pi}{4}}}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

Dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (0, e') = (0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$:

$$(C) : \quad 2y'^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$2y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 1 = 0$$

$$y'^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x'+1)$$

$$y'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\doteq x''}$$

On pose $\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y'' = y' \end{cases}$, donc

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x''-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y''\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

définissent le chgt de repère de $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ vers $\mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

dans lequel (C) : $y''^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x''$

(C) est donc une parabole d'axe de symétrie $\Omega x''$, de sommet Ω, et de paramètre $p = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35$.

Le paramètre p permet de placer le foyer F et la directrice D de la parabole. Dans le nouveau repère R'', on a :

$$\begin{cases} F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, 0\right) \\ D \ : \ x'' = -\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

D'où le dessin.

Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$x^2+y^2+2xy-x+y-1=0$$

dans le r.o. $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer l'axe focal, le(s) foyer(s) et la (les) directrice(s) associées.

• Méthode classique : $q(x,y)=x^2+y^2+2xy=(x,y)\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ se diagonalise. Comme $\chi_M(X)=X^2-2X$, on trouve les valeurs propres 0 et 2, et les s.e. propres associés :

$E_0 : x+y=0$ dirigée par $\vec{u}_1\begin{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$E_2 : x-y=0$ " " $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}$

etc (elle est développée dans la feuille précédente)

• Solution plus rapide :

$\mathcal{C}$ admet l'équation $(x+y)^2-(x-y)-1=0$

$$2\left(\frac{x+y}{\sqrt2}\right)^2-\sqrt2\,\frac{x-y}{\sqrt2}-1=0$$

$$2\underbrace{\left(\frac{x+y}{\sqrt2}\right)}_{Y}^2-\sqrt2\underbrace{\left(\frac{x-y}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{X}=0$$

$$2Y^2-\sqrt2X=0$$

$$\boxed{Y^2=\frac{\sqrt2}{2}X}$$

dans le r.o. (Ω,X,Y) défini par le chgt de coord. :

$$\begin{cases}X=\dfrac{x}{\sqrt2}-\dfrac{y}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt2}\\ Y=\dfrac{x}{\sqrt2}+\dfrac{y}{\sqrt2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$$

$R_{\frac{\pi}{4}}$ = mat. de la rot. vect. d'angle $\frac{\pi}{4}$

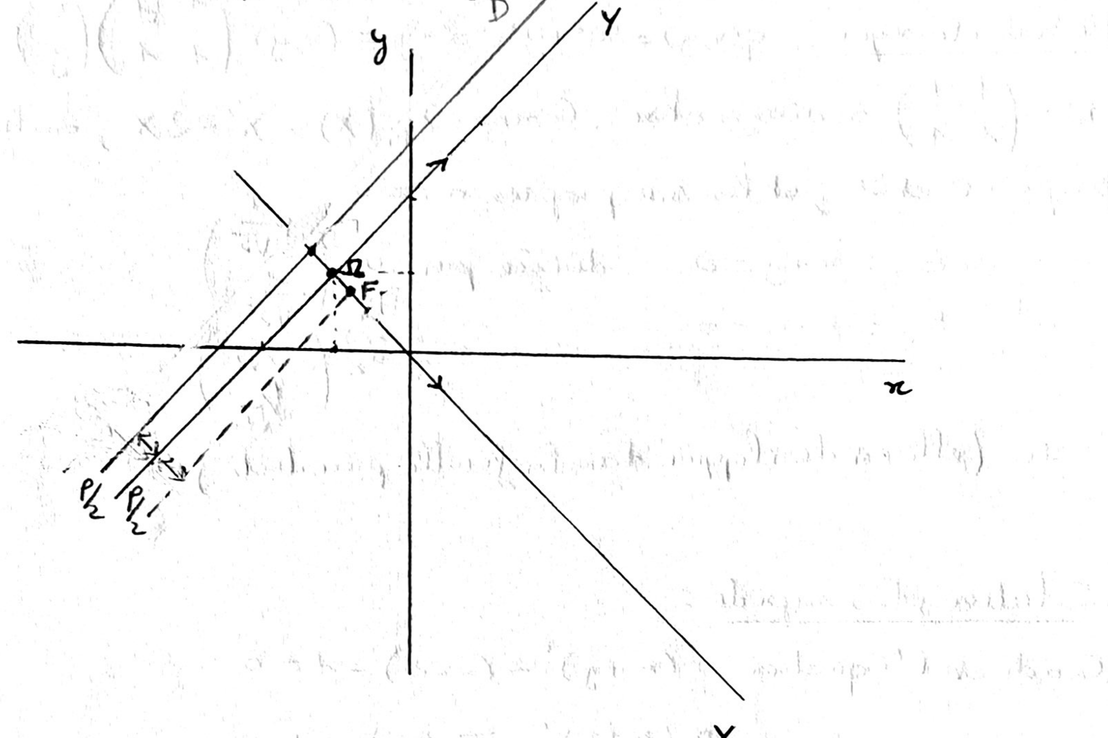
(réf. Serfati IV. 5.3 p 156)

soit $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \quad \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\Omega} \qquad (*)$$

(colonnes de la matrice : $\vec{I}$, $\vec{J}$)

Le nouveau r.o. $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est facile à placer :



$Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} X$ est l'éq. réduite d'une parabole d'axe focal (ΩX) et de paramètre $p = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35$, ce qui permet de placer le foyer F et la directrice D dans le r.o. $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$:

$$F \begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D : \; X = -\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

que l'on exprime dans le r.o. $(0, \vec{i}, \vec{j})$ grâce aux formules $(*)$:

$$F \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \text{ dans } (0, \vec{i}, \vec{j}) \qquad D : \; \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$D : \; x - y = -\frac{5}{4}$$

<u>FIN</u> !

ex : Soit la conique (E) d'équation $x^2+y^2-xy=9$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer qu'il s'agit d'une ellipse, déterminer ses axes, ses foyers et ses directrices.

---

sol. : La méthode de Gauss permet d'avoir la signature de la forme quadratique $q(x,y)=x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2$. Sa signature est $(2,0)$. q est donc une forme quadratique définie positive et (E) est une ellipse.

(E) a pour équation $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{12}=1$ dans le nouveau repère déterminé par les formules de chgt de repère $\begin{cases} x'=x-\frac{y}{2} \\ y'=y \end{cases}$. Ce nouveau repère n'étant pas orthonormé, il n'offre pas d'intérêt pour déterminer les caractéristiques de (E).

Cherchons un repère orthonormé où (E) admet une équation réduite.(*)

$\begin{cases} x=ax'+cy' \\ y=bx'+dy' \end{cases}$ $P=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $(\vec{i},\vec{j})$ vers $(\vec{I},\vec{J})$

O est le centre de l'ellipse (E) (car centre de symétrie évident)

P doit être orthogonale (car transforme une b.o. en une b.o.), donc $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ et $ac+bd=0$.

$(E) : (1-ab)x'^2+(1-cd)y'^2-\underbrace{(ad+bc)}_{=0 \text{ (désiré)}}x'y'=9$

Le système $\begin{cases} ad+bc=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$ est à résoudre :

1) Si $c=0$, $\begin{cases} ad=0 \\ a^2+b^2=1 \\ d^2=1 \\ bd=0 \end{cases} \Rightarrow a^2=d^2=1$ et $ad=0$, impossible.

2) Donc $c\neq 0$ et $\begin{cases} acd+bc^2=0 \Rightarrow b(c^2-d^2)=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$, d'où 2 cas :

α) Si $b=0$, $a^2=1$ et $ac=0$ montre une absurdité.

β) Si $c^2-d^2=0$, $\begin{cases} c^2-d^2=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ c=\frac{\eta}{\sqrt{2}} \end{cases}$ où $\varepsilon=\pm1$ et $\eta=\pm1$

et $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\eta\varepsilon b \\ b=\frac{\tau}{\sqrt{2}} \text{ (où } \tau=\pm1) \end{cases}$

Conclusion : $P=\begin{pmatrix} -\frac{\eta\varepsilon\tau}{\sqrt{2}} & \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{2}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ où $\varepsilon,\tau,\eta\in\{\pm1\}$

On trouve les 8 solutions possibles. L'équation réduite de (E) dans ce nouveau repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est :

$$(E) : \quad \frac{x'^2}{\dfrac{18}{2+\eta\varepsilon}} + \frac{y'^2}{\dfrac{18}{2-\eta\varepsilon}} = 1$$

Prenons $\varepsilon = \tau = \eta = 1$, alors :

$$(E) : \quad \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{18} = 1 \qquad \text{et } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(colonnes $\vec{I}$, $\vec{J}$)

Avec les notations usuelles : $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{6}$, donc $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{18-6} = 2\sqrt{3}$

et les foyers de (E) ont pour coordonnées :

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

L'excentricité de (E) est $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

et permet d'obtenir les équations des directrices. Prenons la directrice (D_1) associée à F_1 :

$$e = \frac{AF_1}{AK} \Rightarrow AK = \frac{AF_1}{e} = \frac{a-c}{e} \Rightarrow OK = a + \frac{a-c}{e} = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = 3\sqrt{3}$$

et : $(D_1) : \; y = 3\sqrt{3}$

$(D_2) : \; y = -3\sqrt{3}$.

(*) Si q est une forme quadratique (sur un e.v. euclidien $\vec{E}$), on sait l'existence d'une base orthonormée (pour le produit scalaire de $\vec{E}$) dans laquelle la matrice de q est diagonale (cf N)

Toute conique ayant une équation du type $q(x,y) = \text{cte}$ (dans $\mathbb{R}^2$), on est assuré, à priori, de l'existence d'une base orthonormée dans laquelle cette conique admet l'équation $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ (ou 0) avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ si q est non dégénérée.

Trouver une équation réduite de la conique d'équation :

$\mathcal{C}$: $(2x+3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

Posons $x' = 2x + 3y$.

$\mathcal{C}$: $x'^2 + 2x' - 5 = 0$

$\Delta' = 1 + 5 = 6$

Les racines sont $-1 \pm 6 \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5 \\ \text{ou} \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$

$\mathcal{C}$ est une conique dégénérée : c'est la réunion de 2 droites parallèles.

(Ramis II.7.2.6 p270)

Trouver une équation réduite de la conique d'équation :

$$(2x+3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$$

dans un repère orthonormal. Préciser les formules de chgt de repère ainsi que les caractéristiques géométriques de la conique ainsi définie.

NB : C'est une conique dégénérée, la forme quadratique $q(x,y) = (2x+3y)^2$ étant de signature $(1,0)$. Si l'on pose $x' = 2x+3y$, on obtient :

$$\mathcal{C} : \quad y = x'^2 + 2x' - 5$$

En posant $\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}y' \\ y = y' \end{cases}$ on définit un chgt de repère de matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C}$ apparaît comme une parabole d'axe (Ω, e'_2) où $e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est tout ce que peut nous donner la méthode de Gauss. Pour avoir le paramètre de $\mathcal{C}$, on choisit la technique générale :

Technique générale :

La forme quad. $q(x,y) = (2x+3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 6xy$ a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

d'où $\chi_M(X) = X^2 - 13X$ $\qquad E(0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ et $E(13) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

Dans la base $e' = (e'_1, e'_2)$ définie par la matrice de passage $P = P_e^{e'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

l'équ. de $\mathcal{C}$ devient :

$$\mathcal{C} : \quad 13y'^2 + 4\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y'\right) + 5\left(\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'\right) - 5 = 0$$

$$13y'^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{23}{\sqrt{13}}y' - 5 = 0$$

$$13\left(y' + \frac{23}{26\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{23^2}{52\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}x' - 5 = 0$$

(Ramis II. 7. 2. 6 p 270)

soit $13\left(\underbrace{y'+\frac{23}{26\sqrt{13}}}_{y''}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{13}}\left(\underbrace{x'+\frac{529}{104}+\frac{5\sqrt{13}}{2}}_{x''}\right)=0$

$$13y''^2=\frac{2}{\sqrt{13}}x''$$

$$\boxed{y''^2=\frac{2}{13\sqrt{13}}x''}$$ dans le rep. orthonormal (Ω, e''_1, e''_2) défini

par les formules de chgt de repères :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''-\frac{529}{104}-\frac{5\sqrt{13}}{2}\\ y''-\frac{23}{26\sqrt{13}}\end{pmatrix}$$

ie $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3\times529}{104\sqrt{13}}+\frac{15}{2}-\frac{23}{169}\\ -\frac{2\times529}{104\sqrt{13}}-5-\frac{69}{26\times13}\end{pmatrix}}_{\doteq\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}}$$

Ccl : C est la parabole d'axe (Ω, x'')

où $\Omega\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega x''}=\mathbb{R}e''_1$, de

paramètre $p=\frac{1}{13\sqrt{13}}$ (penser à $y^2=2px$)

donc de foyer $F\begin{pmatrix}p/2\\0\end{pmatrix}$ dans le repère (Ω, e''_1, e''_2)

(ie $F\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}p/2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ dans le repère $(0, e_1, e_2)$ initial)

Trouver une équation réduite de la conique :

$$\mathcal{C} : \quad xy + 3x + 5y - 4 = 0$$

Préciser les formules de chgt de repère, le centre, les foyers et les directrices de $\mathcal{C}$, s'il y a lieu.

---

* $\text{Mat}(q\,;e) = M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ où e désigne la base canonique.

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

Le sev $E\left(\frac{1}{2}\right)$ associé à $\frac{1}{2}$ est la dte $\mathbb{R}e'_1$ où $e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

" $E\left(-\frac{1}{2}\right)$ " $-\frac{1}{2}$ " $\mathbb{R}e'_2$ où $e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

La matrice de passage de e à $e' = (e'_1, e'_2)$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(q\,;e') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $xy = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$

$$\mathcal{C} : \quad \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 4 = 0$$

d'où $\mathcal{C}$: $x'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - y'^2 - 2\sqrt{2}\,y' - 8 = 0$

$$(x' + 4\sqrt{2})^2 - 32 - \left((y' + \sqrt{2})^2 - 2\right) - 8 = 0$$

$$(x' + 4\sqrt{2})^2 - (y' + \sqrt{2})^2 = 38$$

$$\frac{(x' + 4\sqrt{2})^2}{38} - \frac{(y' + \sqrt{2})^2}{38} = 1$$

$$\mathcal{C} : \quad \boxed{\frac{x''^2}{38} - \frac{y''^2}{38} = 1}$$ est l'équation d'une hyperbole.

Les formules de chgt de repères sont :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} x' = x'' - 4\sqrt{2} \\ y' = y'' - \sqrt{2} \end{cases}$

ie $\boxed{\begin{cases} x = \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 5 \\ y = \frac{x''}{\sqrt{2}} - \frac{y''}{\sqrt{2}} - 3 \end{cases}}$

(Ramis II, 7.2.6 p270)

Le centre de symétrie de $\mathcal{C}$ est la nouvelle origine $\Omega\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$, les axes de symétrie sont les axes du nouveau repère $Ox'' = (\Omega, \mathbb{R}e'_1)$ et $Oy'' = (\Omega, \mathbb{R}e'_2)$ (parallèles aux bissectrice du repère (o, e_1, e_2))

* <u>Recherche des foyers et directrices</u> :

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est :

$$\frac{x^2}{38} - \frac{y^2}{38} = 1 \quad \text{dans le nouveau repère.}$$

Pour déterminer foyers et directrices, on doit écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$

$$\frac{MF}{MH} = e \iff MF^2 = e^2 MH^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$$

$$\mathcal{C} : \quad y^2 = x^2 - 38$$

Posons $x - c = x'$. $\quad \mathcal{C}$: $y^2 = (x'+c)^2 - 38$

$$y^2 = x'^2 + 2cx' + c^2 - 38$$

$$x'^2 + y^2 = \underbrace{2x'^2 + 2cx' + c^2 - 38}$$

on cherche c de sorte que ce trinôme en x' admette une racine double.

$$\Delta' = c^2 - 2(c^2 - 38) = 76 - c^2$$

Prenons donc $c = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. La racine est $x' = -\frac{c}{2} = -\sqrt{19}$ d'où :

$$\mathcal{C} : \quad x'^2 + y^2 = 2\left(x' + \sqrt{19}\right)^2$$

$$\boxed{\mathcal{C} : \quad (x - 2\sqrt{19})^2 + y^2 = 2\left(x - \sqrt{19}\right)^2}$$

C'est l'équation focale de la conique $\mathcal{C}$.

Les foyers de $\mathcal{C}$ sont $F\begin{pmatrix}\pm 2\sqrt{19}\\0\end{pmatrix}$ et les directrices ont pour équations $x = \pm\sqrt{19}$.

L'excentricité e vaut $e = \sqrt{2}$.

<u>NB</u> : On peut vérifier $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2 \times 38}}{\sqrt{38}} = \sqrt{2}$.

Une conique est donnée par l'une des ses équations cartésiennes dans un repère orthonormal $\mathcal{R}=(O,e_1,e_2)$:

$$\mathcal{C}:\ 4x^2+10\sqrt{2}\,xy-y^2+\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y-1=0$$

Trouver la nature de $\mathcal{C}$; son équation réduite dans un repère orthonormal convenable, et préciser aussi les formules de changement de repère.

$$\mathcal{C}:\ 4x^2+10\sqrt{2}\,xy-y^2+\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y-1=0$$

$q(x,y)=4x^2+10\sqrt{2}\,xy-y^2$ admet la matrice :

$$M=\begin{pmatrix}4 & 5\sqrt{2}\\ 5\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$\chi_M(X)=\begin{vmatrix}4-X & 5\sqrt{2}\\ 5\sqrt{2} & -1-X\end{vmatrix}=X^2-3X-54=(X-9)(X+6)$$

* Cherchons les sev propres de M : ce sont des droites orthogonales.

$E(9)$: $5\sqrt{2}x-10y=0$

$E(9)$ est la dte vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, ou encore par $e'_1\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ qui est unitaire.

$E(-6)$ sera donc la droite $\mathbb{R}e'_2$ avec $e'_2\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ unitaire.

* Notons $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ les coordonnées dans la nouvelle base $e'\doteq(e'_1,e'_2)$.

On aura :

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & -\sqrt{2}/\sqrt{6}\\ \sqrt{2}/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}}_{\doteq P}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \qquad (1)\\ q(x,y)=q(x',y')=9x'^2-6y'^2\end{cases}$$

L'équation de $\mathcal{C}$ devient, dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O, e'_1, e'_2)$:

$$\mathcal{C} : 9x'^2 - 6y'^2 + \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}y'\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right)}_{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)x' + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}}\right)y' = x'} - 1 = 0$$

$$\mathcal{C} : 9x'^2 - 6y'^2 + x' - 1 = 0$$

$$9\left(x'^2 + \frac{x'}{9}\right) - 6y'^2 - 1 = 0$$

$$9\left[\left(x' + \frac{1}{18}\right)^2 - \frac{1}{18^2}\right] - 6y'^2 - 1 = 0$$

$$9\left(x' + \frac{1}{18}\right)^2 - 6y'^2 - \frac{37}{36} = 0$$

Posons $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{1}{18} \\ y'' = y' \end{cases}$ (2)

On obtient l'équation réduite :

$$\boxed{\mathcal{C} : \frac{x''^2}{\frac{37}{36 \times 9}} - \frac{y''^2}{\frac{37}{36 \times 6}} = 1}$$

C'est une hyperbole d'axes ceux du nouveau repère $\mathcal{R}'' = (\Omega, e''_1, e''_2)$ dans lequel les coordonnées d'un point sont $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. Les formules de passage de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$ sont données par (1) et (2) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' - \frac{1}{18} \\ y'' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{P}_{\text{chgt de base}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{9\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{18\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\text{coord. de la nelle origine } \Omega \text{ dans l'ancien repère } \mathcal{R}}}$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ dont une équation, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$y^2 + mx^2 + (m+1)x - \frac{m}{4} = 0$$

Solution :

[0] [ucon0024] Dany-Jack Mercier
Fractale TCE 1992, 15p279

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$y^2 + mx^2 + (m+1)x - \frac{m}{4} = 0$$

* Si $m = 0$, $y^2 = -x$ et $\mathcal{C}$ est une parabole.

* Si $m \neq 0$,

$$\mathcal{C}_m : y^2 + m\left(x^2 + \frac{m+1}{m}x\right) - \frac{m}{4} = 0$$

$$m\left(x + \frac{m+1}{2m}\right)^2 + y^2 = \frac{(m+1)^2 + m^2}{4m}$$

$$\mathcal{C}_m : \frac{\left(x + \frac{m+1}{2m}\right)^2}{\frac{2m^2+2m+1}{4m^2}} + \frac{y^2}{\frac{2m^2+2m+1}{4m}} = 1$$

Ainsi :

Lorsque $m > 0$, $\mathcal{C}_m$ est une ellipse de centre $\Omega\begin{pmatrix} -\frac{m+1}{2m} \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'axes Ox, Oy.

Lorsque $m < 0$, $\mathcal{C}_m$ est une hyperbole d'axe focal Ox et de centre Ω.

(réf. Fractale TCE 92, 15 p 279)

E désigne l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un cercle C coupe E en 4 points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 . On note $(a\cos\theta_i, b\sin\theta_i)$ les coordonnées de M_i pour $1 \leq i \leq 4$. Démontrer que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \equiv 0 \ (2\pi)$.

Solution :

[0] [ucon0025] Dany-Jack Mercier
Serfati IV.5.30 p171

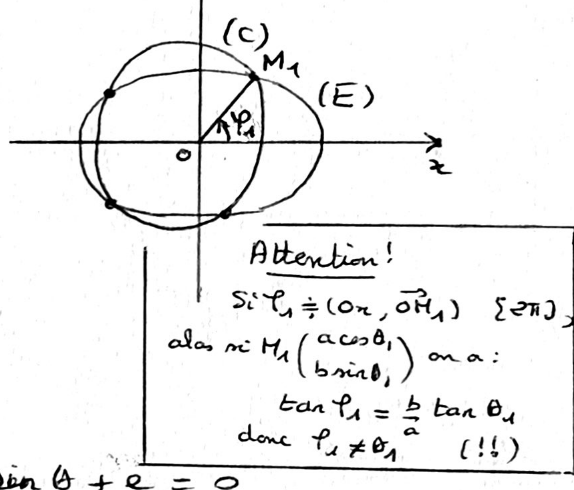
(E) désigne l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal (O, Ox, Oy). Un cercle (C) coupe (E) en quatre points distincts M_1, M_2, M_3, M_4, et l'on pose

$$M_i\begin{pmatrix} a\cos\theta_i \\ b\sin\theta_i \end{pmatrix} \qquad 1\leq i\leq 4$$

Démontrer que $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 \equiv 0 \quad [2\pi]$

Les éq. paramétriques de (E) sont :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$



Attention !
Si $\varphi_1 \doteq (Ox, \vec{OM_1})$ [2π], alors si $M_1\begin{pmatrix} a\cos\theta_1 \\ b\sin\theta_1 \end{pmatrix}$ on a :
$\tan\varphi_1 = \frac{b}{a}\tan\theta_1$
donc $\varphi_1 \neq \theta_1$ (!!)

Soit (C) : $x^2+y^2+cx+dy+e=0$

θ sera l'un des θ_i, $1\leq i\leq 4$, ssi il vérifie :

$$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + ca\cos\theta + db\sin\theta + e = 0$$

Posons $z = e^{i\theta}$, alors z est solution de l'équation du 4ème degré :

$$a^2\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^2 + b^2\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^2 + ac\,\frac{z+\bar z}{2} + bd\,\frac{z-\bar z}{2i} + e = 0$$

$$\frac{a^2}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}+\frac{bd}{2i}\right)z + \left(\frac{ac}{2}-\frac{bd}{2i}\right)\frac{1}{z} + e = 0$$

$$\left(\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)z^4 + \left(\frac{ac}{2}+\frac{bd}{2i}\right)z^3 + \left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+e\right)z^2 + \left(\frac{ac}{2}-\frac{bd}{2i}\right)z + \frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4} = 0$$

Le produit des racines $e^{i\theta_j}$, $1\leq j\leq 4$, sera $\frac{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}}{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}} = \underline{\underline{1}}$ soit :

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 \equiv 0 \quad [2\pi]$$

CQFD

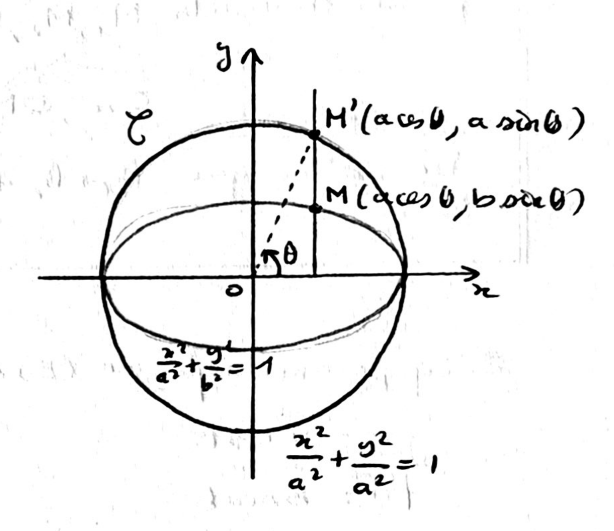
…/…

(Serfati IV.5.30 p171)

NB : Interprétation de θ, où $M(a\cos\theta, b\sin\theta)$ est sur l'ellipse E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

E est l'image du cercle $\mathcal{C}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ par l'affinité de base Ox, de dir. Oy et de rapport $\frac{b}{a}$.

θ est donc l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'})$.



Montrer que l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) &= \cos 2t \\ y(t) &= 3+\sin t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

est inclus dans une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. Dessiner cet arc.

Solution :

[0] [ucon0026] Dany-Jack Mercier
réf. Fractale TCE 1992, 19p278

Trouver une équation cartésienne de l'arc paramétré

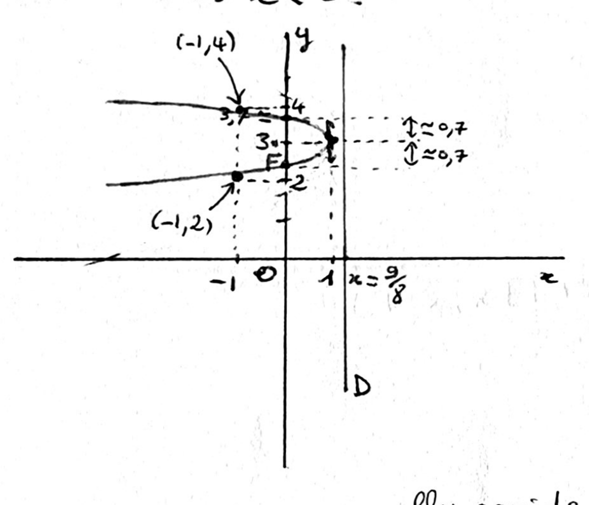
$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = 3 + \sin t \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Montrer que cet arc est inclus dans une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. Dessiner cette parabole.

$x(t) = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2(y-3)^2$

$x = -2y^2 + 12y - 17$

Il s'agit d'une parabole de sommet $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ puisque $x' = -4y + 12 = 0$ ssi $y = 3$, d'où $x(3) = 1$. L'axe de cette parabole est // à Ox et elle tourne sa concavité vers les $x < 0$.



Remarques :

Plus rapide : $\overbrace{2(y-3)^2}^{y'} = \overbrace{1-x}^{x'}$

$y'^2 = \frac{1}{2}x' = 2px'$

donc $\boxed{p = \frac{1}{4}}$

Chgt de repère : $\begin{cases} x = -x' + 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

* Paramètre de cette parabole ?

$x = -2(y^2 + 6y) - 17 = -2\left[(y+3)^2 - 9\right] - 17$

$= -2(y+3)^2 + 1$

$(y+3)^2 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$Y^2 = +\frac{1}{2}X$ dans le nouveau repère défini par le chgt de coord $\begin{cases} X = -x + 1 \\ Y = y + 3 \end{cases}$

Le paramètre p de cette parabole sera $p = +\frac{1}{4}$

* On en déduit que le foyer F est $F\begin{pmatrix}1 - \frac{1}{8}\\3\end{pmatrix}$ et que la directrice associée est d'équation $x = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

…/…

(Fractale TCE92, 19 p 278)

$t \mapsto 3+\sin t$ a pour image $[2,4]$ quand t décrit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$t \mapsto \cos 2t$ " $[-1,1]$ " $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ainsi, si l'on note $\mathcal{C}$ l'arc paramétré de l'énoncé et $\mathcal{P}$ la parabole $x = -2y^2 + 2y - 17$, on a montré :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{P} \cap ([-1,1] \times [2,4])$$

Réc., si $M \in \mathcal{P} \cap ([-1,1] \times [2,4])$, il existe t tq $y = 3+\sin t$ et

$$\begin{aligned} x &= -2(3+\sin t)^2 + 12(3+\sin t) - 17 \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ &= \cos 2t \end{aligned}$$

donc $M \in \mathcal{C}$.

<u>Ccl</u> : $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap ([-1,1] \times [2,4])$

Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle.

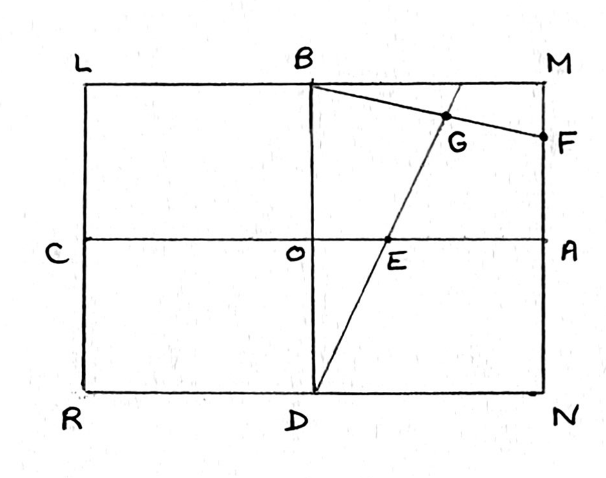
Soient $LMNR$ un rectangle de centre O, A le milieu de $[MN]$, B celui de $[LM]$ et D celui de $[AN]$. On trace les points $E \in [OA]$ et $F \in [MA]$ tels que $\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$. Montrer que le point G d'intersection des droites (BF) et (DE) appartient à l'ellipse inscrite dans le rectangle $LMNR$.

Solution :

[0] [ucon0029] Dany-Jack Mercier

cf. article "Peut-on commencer par les statistiques ?" de R. Arnaud, Repère n°6 de janvier 1992.

Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle



Les points E et F vérifient :

$$\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$$

et appartiennent respectivement aux segments [OA] et [MA].

Mq G appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$ inscrite dans le rectangle LMNR.

On montre que les coordonnées $\binom{x}{y}$ de G vérifient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $A\binom{a}{0}, B\binom{0}{b}$.

Soit $k \in [0,1]$, et : $OE = k\,OA$, $MF = k\,OB$.

On a : $E\begin{pmatrix} ka \\ 0 \end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix} a \\ b-kb \end{pmatrix}$

$$G\binom{x}{y} \in (DE) \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \binom{0}{-b} + \lambda \begin{pmatrix} ka \\ b \end{pmatrix}$$

$$(BF) : \quad \begin{vmatrix} x & a \\ y-b & (b-kb)-b \end{vmatrix} = 0$$

$$-kbx - ay + ab = 0$$

$G \in (BF)$ donc $-kb(\lambda ka) - a(-b+\lambda b) + ab = 0$

d'où $\lambda = \frac{2}{1+k^2}$, et les coordonnées de G :

$$\boxed{G\begin{pmatrix} \frac{2ka}{1+k^2} \\ b\,\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}}$$

On vérifie alors que $G \in \mathcal{E}$, ie :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{2ka}{1+k^2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(b.\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 = 1$$

qui est trivialement vérifié.

(réf. Art. "Peut-on commencer par les statistiques" de R. Arnaud, Repères n° 6 de janvier 92)

Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle.
On considère l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$ du plan. Soient $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$ et $T(a,b)$. La perpendiculaire à (AB) passant par T coupe les droites (OA) et (OB) respectivement en U et V. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) de centre U (resp. V) et de rayon UA (resp. VB) est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de l'ellipse et tangent en A (resp. B) à cette ellipse.

Solution :

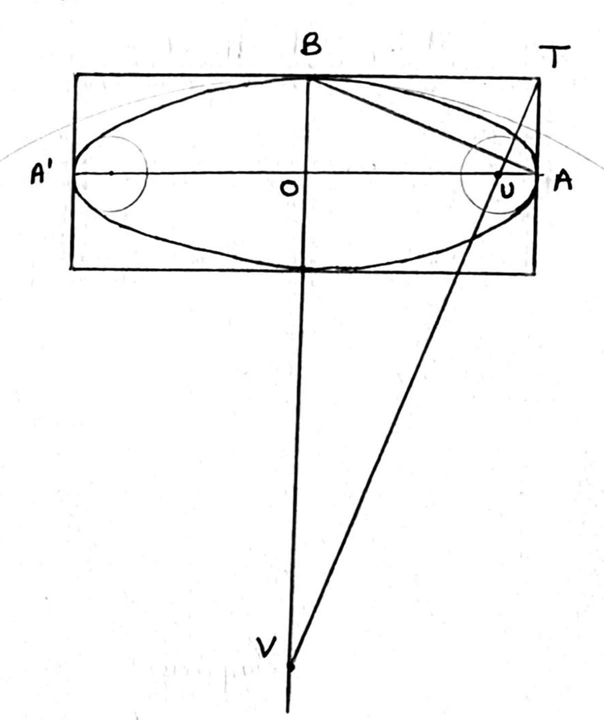
[0] [ucon0030] Dany-Jack Mercier
cf cours de Colmez

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE

Justifiez le résultat suivant permettant la construction précise d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'axes $[AA']$ et $[BB']$ donnés ($AA' > BB'$) :

— La perpendiculaire à (AB) passant par T coupe les droites (AA') et (BB') resp. en U et V.

— Le cercle $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) de centre U (resp. V) et de rayon UA (resp. VB) est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de l'ellipse $\mathcal{E}$, et tangent en A (resp. B) à cette ellipse.



Dans le r.o. $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}, \frac{\overrightarrow{OB}}{OB}\right)$, l'ellipse $\mathcal{E}$ admet l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $(AB) : y = -\frac{b}{a}x + b$

$(TV) : y = \frac{a}{b}(x-a) + b$

D'où $U\begin{pmatrix} a - \frac{b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a^2}{b} + b \end{pmatrix}$

En posant $c^2 = a^2 - b^2$, on obtient $U\begin{pmatrix} \frac{c^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$, $V\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c^2}{b} \end{pmatrix}$.

Les équations des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont faciles à obtenir. Par exemple :

$$\mathcal{C}_1 : \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

Dire que tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de l'ellipse $\mathcal{E}$ se trouve à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_1$ revient à dire que

$$P(x) = \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{b^4}{a^2}$$

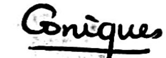
est positif pour tout $x \in [-a, a]$.

(réf. Cours de Colmez)

On trouve bien :

$$P(x) = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2\frac{c^2}{a}x + c^2 = \left(\frac{c}{a}x - c\right)^2 \geq 0$$

Enfin $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}_1$ admettent la même tangente en A, à savoir (AT). □



Quelle est la nature de la courbe représentée par l'équation suivante dans un repère orthonormal :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 = 0$$

Solution :

[0] [ucon0031] Dany-Jack Mercier
réf. Ramis II.7.26 p270

Quelle est la nature de la courbe représentée par l'équation suivante dans un repère orthonormal :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - e^2 (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0$$

Discuter suivant les valeurs de x_0, y_0, α et p.

Posons $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et D_α = droite d'équation $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$

$$d(M, D_\alpha) = \frac{|x\cos\alpha + y\sin\alpha - p|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = |x\cos\alpha + y\sin\alpha - p|$$

permet de ré-écrire l'équation de cette conique :

$$\|\overrightarrow{MM_0}\|^2 = e^2\, d(M, D_\alpha)^2$$

soit $$\frac{MM_0}{d(M, D_\alpha)} = e$$

Il s'agit d'une conique d'excentricité e, de foyer M_0 et de directrice associée D_α (...)

(Ramis II. 7.26 p 270)

Section d'un cylindre.

a) Soit r un réel strictement positif. On considère le cylindre de révolution C d'équation $x^2+y^2=r^2$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et l'on se donne un plan P_θ passant par O et faisant un angle de mesure θ (différent de $\frac{\pi}{2}$) modulo π avec le plan de coordonnées $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Montrer que l'intersection $C \cap P_\theta$ est une ellipse et déterminer la longueur de son demi-grand axe.

b) Application : Un tronc d'arbre ayant la forme d'un cylindre de révolution est posé horizontalement sur le sol. On pratique deux découpes verticales du tronc suivant des plans perpendiculaires entre eux mais non parallèles à l'axe du tronc. Le segment le plus long de la première découpe mesure 60 cm et celui de la deuxième découpe 80 cm. Quel est le diamètre du tronc ?

c) Peut-on retrouver le résultat de la question b) sans utiliser la question a) ? (Ind. : penser aux relations métriques dans le triangle rectangle)

Solution :

[0] [ucon0032] v1.02 Dany-Jack Mercier (Le b) a été posé par une PE1 sous forme de devinette).

Sections d'un cylindre :

a) Soit r un réel strictement positif. On considère le cylindre de révolution C d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et l'on note P_θ le plan passant par O faisant un angle de mesure θ ($\neq \frac{\pi}{2}$) modulo π avec le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Montrer que l'intersection $C \cap P_\theta$ est une ellipse et déterminer la longueur de son demi-grand axe.

un X

b) Application : Un tronc d'arbre ayant la forme d'un cylindre de révolution est posé horizontalement sur le sol. On pratique deux découpes verticales du tronc suivant des plans perpendiculaires entre eux mais non parallèles à l'axe du tronc. Le segment le plus long de la première découpe mesure 60 cm et celui de la deuxième découpe 80 cm. Quel est le diamètre du tronc ?

c) Retrouver le résultat de la question b) en utilisant le Th de Pythagore

Solution :

$z=Z$, P_θ, Y, $\vec{k}$, $\vec{u_\theta}$, θ, o, $\vec{j}$, y, $\vec{i}$, $x=X$

a) $C \cap P_\theta : \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x,y) \in P_\theta \end{cases}$

X On peut supposer que $\vec{i}$ dirige $(O,\vec{i},\vec{j}) \cap P_\theta$.

Une base de P_θ est $(\vec{i}, \vec{u_\theta})$ où $\vec{u_\theta} = \cos\theta\, \vec{j} + \sin\theta\, \vec{k}$.

Soient les repères $R' = (o, \vec{i}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$ et $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La matrice de passage est

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

donc les formules de chgt de repère sont $\begin{cases} x = X \\ y = \cos\theta\, Y \\ z = \sin\theta . Y + Z \end{cases}$

Par suite $C \cap P_\theta : \begin{cases} X^2 + \cos^2\theta\, Y^2 = r^2 \\ Z = 0 \end{cases}$, et $C \cap P_\theta$ est l'ellipse de P_θ d'équation $\dfrac{X^2}{r^2} + \dfrac{Y^2}{\frac{r^2}{\cos^2\theta}} = 1$. En supposant $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ (ce qui est toujours possible), on trouve que $C \cap P_\theta$ est l'ellipse de centre O, de demi-grand axe $\dfrac{r}{\cos\theta}$

[0] [ucon0032] Dany-Jack Mercier
Le b) a été posé par une PE1 sous forme de devinette.

et de demi-petit axe r porté par Ox.

NB : Si θ est donné modulo 2π, le demi-grand axe sera $\dfrac{r}{|\cos\theta|}$.

~~d'une ellipse d'axes $(O,\vec{i})$ et $(O,\vec{u}_\theta)$ et de demi-grand axe $\frac{r}{|\cos\theta|}$~~

suite

b) Ici les 2 plans de coupe sont perpendiculaires entre eux, donc il s'agit de P_θ et $P_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ et l'on peut supposer $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

On a, si r désigne le rayon du tronc (et d'après a)) :

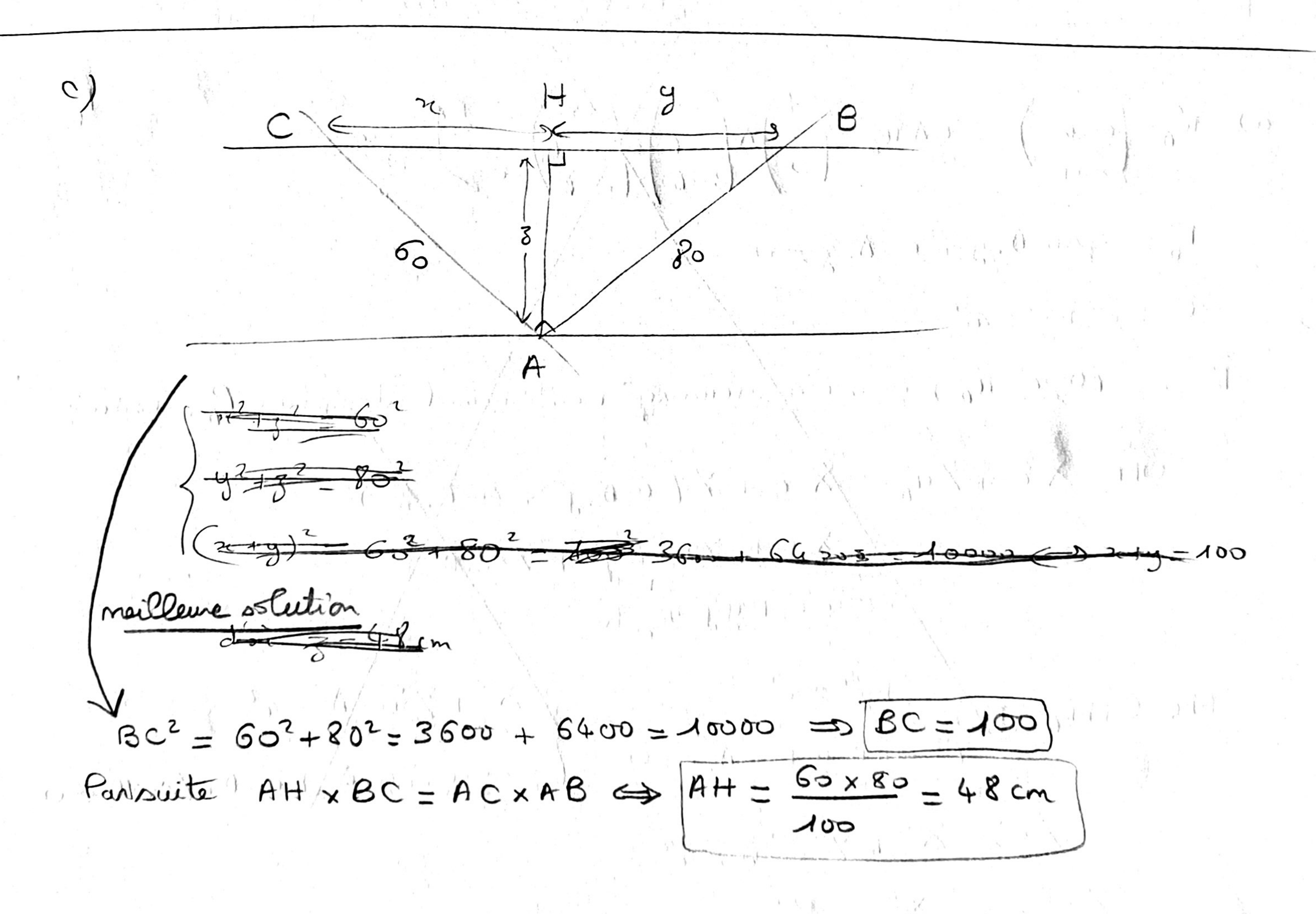
$$\begin{cases} \dfrac{r}{|\cos\theta|} = 30 \\ \dfrac{r}{\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|} = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 30\cos\theta \\ r = 40\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r^2}{30^2} + \frac{r^2}{40^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = 24 \text{ cm}}$$

---

c)



~~$x^2+z^2 = 60^2$~~

~~$y^2+z^2 = 80^2$~~

~~$(x+y)^2 = 60^2+80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Leftrightarrow x+y = 100$~~

meilleure solution

~~donc $z = 4.8$ cm~~

$BC^2 = 60^2+80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow \boxed{BC = 100}$

Par suite $AH \times BC = AC \times AB \Leftrightarrow \boxed{AH = \frac{60 \times 80}{100} = 48 \text{ cm}}$

Triangle inscrit dans une hyperbole équilatère.

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit ABC un triangle inscrit dans l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $xy = k$ avec $k > 0$. On note D_A la hauteur issue de A du triangle ABC, et a, b, c les abscisses respectives des points A, B et C.

1) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de D_A et de l'hyperbole $\mathcal{H}$? En déduire que l'orthocentre D du triangle ABC appartient à l'hyperbole.

2) Montrer que $D = A$ si, et seulement si, la droite D_A est tangente à l'hyperbole.

3) Montrer que, de façon générale, deux hyperboles passant par 4 points distincts A, B, C, D et admettant la même tangente en A sont égales. On admettra le résultat similaire suivant : "deux hyperboles passant par 3 points distincts A, B, C et admettant la même tangente en deux de ces points sont égales".

4) Montrer que si deux hyperboles équilatères distinctes se coupent en 4 points distincts, alors chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.

5) On suppose ici que les deux hyperboles équilatères distinctes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont tangentes en un point A et se coupent en deux autres points distincts B et C. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A, et que la hauteur D_A issue de A du triangle ABC est une tangente commune aux deux hyperboles.

6) Le cercle $\mathcal{S}$ circonscrit au triangle ABC admet l'équation $x^2 + y^2 - 2rx - 2sy + t = 0$. Exprimer l'abscisse du quatrième point d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ en fonctions de a, b, c. En déduire que le cercle passe par le symétrique D' de l'orthocentre D du triangle ABC par rapport à l'origine O.

7) On suppose ici que le triangle ABC est équilatéral et inscrit dans l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$. Montrer que le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à $\mathcal{H}$, puis que le symétrique Ω' de Ω par rapport à O appartient à la fois au cercle circonscrit à ABC et à $\mathcal{H}$.

Solution :

Autres questions : voir manuscript AG42.

3) Supposons que les hyperboles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ passent par les 4 points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ et admettent la même tangente en A. On peut toujours se placer dans un repère dont les axes sont les asymptotes de $\mathcal{H}$,.et noter

$$P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

l'équation de $\mathcal{H}'$ dans ce repère. Les points de $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ sont caractérisés par

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ Q(x) = x^2 P\left(x, \frac{k}{x}\right) = ax^4 + dx^3 + (kc + f)x^2 + kex + k^2 b = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $Q(x) = x^2 P\left(x, \frac{k}{x}\right)$ admet 4 racines distinctes, à savoir x_A, x_B, x_C, x_D, La tangente T à $\mathcal{H}'$ en A admet l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A)(x - x_A) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A)(y - y_A) = 0$$

[0] [ucon0036] v1.01 Dany-Jack Mercier (cf. III.1 et III.2 du CAPES ext. 1997, 2ème comp., AG42 avec des modifications mineures. III.1.1 = 1), III.1.2 = 2), III.1.3 = 4), III.1.4 = 5), III.2.1 et III.2.2 = 6.b).

T est aussi par hypothèse la tangente à $\mathcal{H}$ en A, donc admet aussi l'équation

$$y - y_A = -\frac{k}{x_A^2}(x - x_A) \quad \text{soit} \quad \frac{k}{x_A^2}(x - x_A) + y - y_A = 0$$

On aura donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A) \\ \frac{k}{x_A^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) - \frac{k}{x_A^2}\frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A) = 0$$

Dérivons $Q(x)$:

$$Q'(x) = 2xP\left(x, \frac{k}{x}\right) + x^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\left(x, \frac{k}{x}\right) - \frac{k}{x^2}\frac{\partial P}{\partial y}\left(x, \frac{k}{x}\right)\right)$$

soit

$$Q'(x_A) = 2x_A P(x_A, y_A) + x_A^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) - \frac{k}{x_A^2}\frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A)\right) = 0$$

Le polynôme $Q(x)$ est ainsi de degré au plus 4 et admet quatre racines distinctes dont une, x_A, multiple. C'est impossible sauf si c'est le polynôme nul. On peut d'ailleurs le vérifier en écrivant

$$Q(x) = c(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)(x - x_D) \quad c \in \mathbb{R}$$

et

$$Q'(x_A) = c(x_A - x_B)(x_A - x_C)(x_A - x_D) = 0$$

qui entraîne $c = 0$ donc $Q \equiv 0$. On déduit

$$a = d = kc + f = ke = k^2 b = 0$$

soit $\mathcal{H}' : cxy - kc = 0$. L'hyperbole $\mathcal{H}'$ admet donc la même équation $xy = k$ que $\mathcal{H}$, et $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

① III.1.1

$\mathcal{D}_A$: $\vec{AM}.\vec{BC} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{k}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-b \\ \frac{k}{c}-\frac{k}{b} \end{pmatrix} = 0 \iff (c-b)(x-a) + k\left(\frac{b-c}{bc}\right)\left(y-\frac{k}{a}\right) = 0$

$$\iff x - a - \frac{k}{bc}y + \frac{k^2}{abc} = 0$$

$$\boxed{\mathcal{D}_A : x - \frac{k}{bc}y - a + \frac{k^2}{abc} = 0}$$

$M(x,y) \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} \iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x - \frac{k}{bc} \cdot \frac{k}{x} - a + \frac{k^2}{abc} = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abcx^2 + (k^2 - a^2bc)x - ak^2 = 0 \end{cases} \quad \text{(a est racine)}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abc(x-a)\left(x + \frac{k^2}{abc}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(a, \frac{k}{a}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right.}$$

En faisant une permutation circulaire et en notant $\mathcal{D}_B$ la hauteur issue de B, on trouve encore :

$$\mathcal{D}_B \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(b, \frac{k}{b}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right\}$$

Le point $D\left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$ est donc sur $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$. C'est l'orthocentre de ABC, et il appartient à $\mathcal{H}$.

(2) **III.1.2**

1ère solution : $\mathcal{D}_A$ coupe $\mathcal{H}$ exactement en A et D (orthocentre de ABC) car $\mathcal{D}_A$ n'est jamais parallèle à une asymptote de $\mathcal{H}$ (sinon 2 pts de $\mathcal{H}$ auraient (la même ordonnée ou la même abscisse)).
Dire que $A = D$ revient à dire que $\mathcal{D}_A$ coupe $\mathcal{H}$ en un seul point A
ie que $\mathcal{D}_A$ est la tangente à $\mathcal{H}$ en A..

2e solution : Analytique

$$D = A \iff -\frac{k^2}{abc} = a \iff a^2bc = -k^2 \quad (1)$$

$\mathcal{D}_A$ admet le vecteur directeur $\vec{u}_A\left(\frac{k}{bc}, 1\right)$ donc la pente $\frac{1}{\frac{k}{bc}} = \frac{bc}{k}$

La tangente à $\mathcal{H}$ en A admet la pente $-\frac{k}{a^2}$.

Ainsi $\mathcal{D}_A$ est tangente à $\mathcal{H}$ ssi $\frac{bc}{k} = -\frac{k}{a^2}$, ie ssi (1) est vraie.

(4) **III.1.3**

- Si les 2 hyperboles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ se coupent en 4 pts distincts A, B, C, D, alors ABC est un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$, donc son orthocentre H appartient à $\mathcal{H}$ d'après III.1.1.
ABC est aussi un triangle inscrit dans $\mathcal{H}'$, donc $H \in \mathcal{H}'$ pour les m̂ raisons.
- De plus $H \notin \{A, B, C\}$, sinon l'on aurait par ex $H = A$ et III.1.2 montrerait que la hauteur $\mathcal{D}_A$ est tangente à $\mathcal{H}$ <u>et</u> à $\mathcal{H}'$.
2 hyperboles qui passent par 4 pts distincts A, B, C, D et qui admettent la même tangente en A, sont nécessairement égales(*). D'où l'absurdité
- Comme $H \in (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}') \setminus \{A, B, C\}$, on aura bien $H = D$ et le résultat annoncé.

(*) C'est la question 3) de ucon0036
(*) Ce lemme peut être admis au concours. Il est démontré en ucon 0010.

(5) **III.1.4** Ici $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \{A, B, C\}$ et $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sont tangentes en A. L'orthocentre D du triangle ABC sera dans $\{A, B, C\}$ d'après III.1.1. Si l'on avait D = B ou C, les 2 hyperboles se couperaient en 3 points et admettraient la même tangente en 2 de ces points (st D=B, ce serait $\mathcal{D}_B$...), donc seraient confondues (cf ucon 0010). Donc D = A, le triangle ABC sera rectangle en A et (III.1.2) la hauteur $\mathcal{D}_A$ sera tangente commune à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

(ou adaptation de la question (3))

(6) **III.2.1**

$$\begin{cases} \mathcal{S}: x^2+y^2-2rx-2sy+t=0 \\ \mathcal{H}: xy=k \end{cases}$$

d'où

$$x^4+k^2-2rx^3-2skx+tx^2=0$$

$$x^4-2rx^3+tx^2-2skx+k^2=0$$

Le produit des racines x_i de cette équation est k^2.

(6) suite

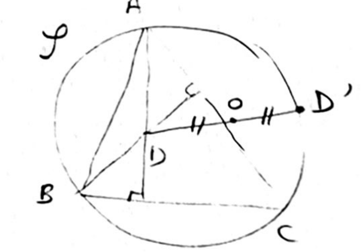
III.2.2

Si $\mathcal{S} = \mathcal{C}_{ABC}$, a, b, c sont 3 racines distinctes de l'équation ci-dessus. La quatrième racine x_4 vérifiera :

$$abc\,x_4 = k^2 \Longrightarrow x_4 = \frac{k^2}{abc}$$

Le 4e point de $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ est donc de coordonnées $\left(\frac{k^2}{abc}, \frac{abc}{k}\right)$.

L'orthocentre D est de coordonnées $\left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$ symétrique du 4e pt de $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ par rapport à O : on a donc $\boxed{D' \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}}$



~~**III.2.3**~~

~~$\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{H}$ en 4 pts distincts A, B, C, Ω' en général, et ici $\Omega' = D'$ = symétrique de l'orthocentre D de ABC / à O. On a $D' \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ (III.2.2). On sait (III.1.1) que $D \notin \mathcal{H}$~~

(7)

preuve de II.2.2 : Si ABC est équilatéral, son orthocentre D coïncide avec le centre Ω de son cercle circonscrit et l'on sait que $D \in \mathcal{H}$ (cf III.1.1).

preuve de II.2.4 : ~~Trivial~~ On a $\Omega' \in \mathcal{S}$ puisque le symétrique D' du centre D de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$ d'après III.2.2. De plus le symétrique de n'importe quel pt de $\mathcal{H}$ / à O est sur $\mathcal{H}$. Comme $\Omega \in \mathcal{H}$, on aura aussi $D' = \Omega' \in \mathcal{H}$.

~~III.3.1 Ici A, B, C, D sont 4 points distincts de $\mathcal{H}$.~~

~~• Si $\mathcal{C} = \Delta \cup \Delta'$ où Δ, Δ' sont 2 droites parallèles aux axes Ox et Oy, alors 2 au moins des 3 points distincts A, B, C seront sur la même droite Δ ou Δ', par exemple A et B. Mais alors (AB) sera parallèle à une asymptote de $\mathcal{H}$ avec $A, B \in \mathcal{H}$. C'est absurde.~~

~~• On sait déjà que $A, B, C, D \in \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes, on peut écrire~~

$$\begin{cases} \mathcal{H} : & xy = k \\ \mathcal{C} : & (x-u)(y-v) = k' \end{cases}$$

Intersection d'un cercle et d'une ellipse.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F et F', et de sommets A et A' sur l'axe focal, avec $AF < AF'$. Montrer que le cercle $\mathcal{C}(F,r)$ coupe l'ellipse $\mathcal{E}$ si et seulement si $a - c \leq r \leq a + c$.

Solution :

Autre solution : Calcul en coordonnées

$$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ (x-c)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & (1) \\ (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = r^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + c^2 - 2cx + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 - r^2 = 0$$

$$\Delta' = c^2 - \frac{c^2}{a^2}(a^2 - r^2) = \frac{c^2r^2}{a^2}$$

2 solutions : $x = \dfrac{c \pm \frac{cr}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} = \dfrac{a^2}{c}\left(1 \pm \dfrac{r}{a}\right) = \dfrac{a^2}{c} \pm \dfrac{ar}{c} = \dfrac{a(a \pm r)}{c}$

Ainsi :

$$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ x = \frac{a(a+r)}{c} \text{ ou } \frac{a(a-r)}{c} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{a(a+r)}{c}\right)^2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{a(a-r)}{c}\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \frac{(a+r)^2}{c^2} \\ \text{ou} \\ 1 \geq \frac{(a-r)^2}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 \geq (a+r)^2 & (a) \\ \text{ou} \\ c^2 \geq (a-r)^2 & (b) \end{cases}$$

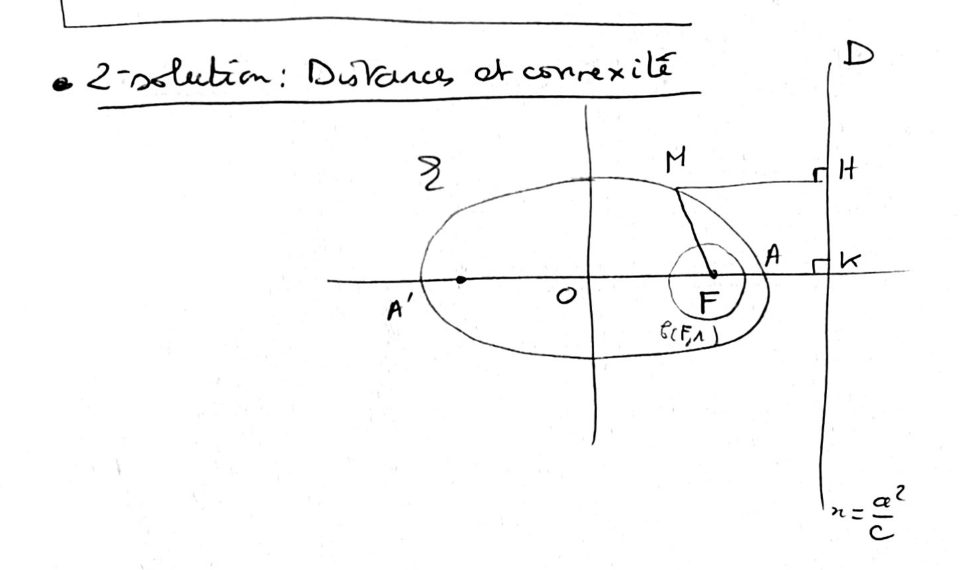
Comme $c^2 \geq (a+r)^2 \Leftrightarrow c^2 \geq a^2 + r^2 + 2ar \Leftrightarrow 0 \geq b^2 + r^2 + 2ar$, l'inégalité (a) est impossible. On aura donc :

[0] [ucon0044] v1.00β Dany-Jack Mercier

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow |a - r| \leq c \Leftrightarrow a - c \leq r \leq a + c$$ □

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F, F' et de sommets A, A' sur l'axe focal, avec $AF < AF'$. Mq le cercle $\mathcal{C}(F, r)$ coupe $\mathcal{E}$ ssi $a - c \leq r \leq a + c$

- 2-solution : Distances et convexité



- On montre que la distance minimum de F à un pt M de $\mathcal{E}$ est atteinte pour $M = A$. En effet :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad MF = e\,MH$$

et donc $\operatorname{Inf}\{MF / M \in \mathcal{E}\} = e \operatorname{Inf}\{MH / M \in \mathcal{E}\}$

Mais si $M(x,y)$, $MH = \frac{a^2}{c} - x$ et x décrit $[-a, a]$, donc MH atteint son minimum pour $x = a$, ie quand $M = A$. Alors :

$$\operatorname{Inf}\{MH / M \in \mathcal{E}\} = AK = \frac{a^2}{c} - a$$

Soit $\boxed{\operatorname{Min}\{MF / M \in \mathcal{E}\} = e\left(\frac{a^2}{c} - a\right) = a - c = d(F, \mathcal{E})}$

- De m̂, on montrerait que $\boxed{\operatorname{Max}\{MF / M \in \mathcal{E}\} = A'F = c + a}$

- Ce qui précède montre clairement que si $r < a - c$ ou $r > a + c$ alors $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}(F, r) = \emptyset$.

- Pour tout $r \in [a - c, a + c] = [\operatorname{Min}\{MF/M \in \mathcal{E}\}, \operatorname{Max}\{MF/M \in \mathcal{E}\}]$ il existe $M \in \mathcal{E}$ tq $r = MF$ ie $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}_{(F,r)} \neq \emptyset$.

En effet, $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto MF$ est continue ; $\mathcal{E}$ est connexe donc $f(\mathcal{E})$ est connexe de $\mathbb{R}$, ie un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $\operatorname{Max}\{f(M) / M \in \mathcal{E}\} = a + c$, $\operatorname{Min}\{f(M) / M \in \mathcal{E}\} = a - c$ on déduit $f(\mathcal{E}) = [a - c, a + c]$. □

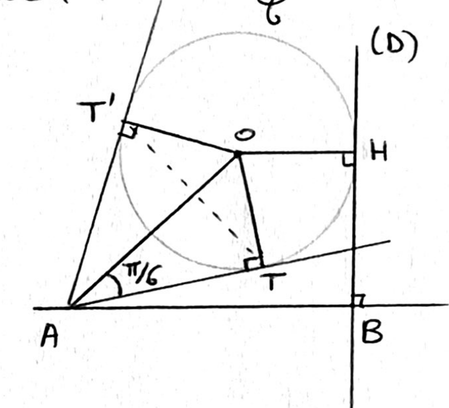
Recherche de lieu géométrique

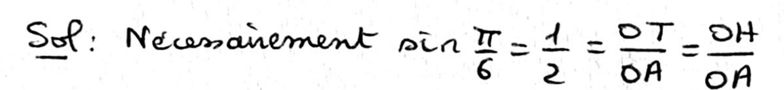
Dans le plan, soient A et B 2 pts distincts, et (D) la perpendiculaire en B à (AB).

Déterminer l'ensemble des points O centres des cercle $\mathcal{C}$ tels que :

- D soit tangente à $\mathcal{C}$
- les pts de contact T et T' des 2 tgtes à $\mathcal{C}$ passant par A sont tels que ATT' soit un triangle équilatéral.

(réf. Fractale 92 p 275)





Sol : Nécessairement $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{OT}{OA} = \frac{OH}{OA}$

d'où $\frac{OA}{OH} = 2$ et O sera sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer A et de directrice (D).

Réc., si O est sur $\mathcal{H} \doteq \{M / \frac{MA}{MH} = 2\}$, notons $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon OH.

OA = 2OH donc A est à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Notons T et T' les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A. Alors

$$\sin\widehat{TAO} = \frac{OT}{OA} = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{TAO} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{TAT'} = \frac{\pi}{3}$$

et ATT' sera équilatéral.

Ccl : O décrit $\mathcal{H}$ en entier

CQFD

Objectif : s'entraîner à l'analyse puis à la synthèse

Outils : trigonométrie, définition des coniques par foyer et directrice

Technique : supposer le pb résolu pour faire un dessin, et trouver ainsi des conditions nécessaires sur O.

Bac 1989 (ext.)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient (P) le plan d'équation $3x + 4z - 5 = 0$ et Γ l'ensemble des pts du plan xOy équidistants de (P) et de l'origine.

a) Calculer la distance d'un pt $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ à (P). En déduire que Γ admet l'équation $x^2+y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Soit $(D) = (P) \cap xOy$. Mq Γ est une conique de foyer O et de directrice associée (D). Déterminer son excentricité.

Sol :

a) $d(M,(P)) = \dfrac{|3x_0+4z_0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{|3x_0+4z_0-5|}{5}$

donc $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2 = x^2+y^2$

b) $(D) : \begin{cases} 3x+4z-5=0 \\ z=0 \end{cases}$ ie $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ z = 0 \end{cases}$

Dans le plan xOy, (D) est d'équation $x = \frac{5}{3}$:

Soit H la proj. de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in xOy$ sur D. On a $H\begin{pmatrix} 5/3 \\ y \end{pmatrix}$

Il faut montrer que $\Gamma = \{ M \in xOy \ / \ \frac{MO}{MH} = e \}$ avec $e \in \mathbb{R}_+^*$ convenable.

On a : $\begin{cases} MO^2 = x^2+y^2 \\ MH^2 = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$

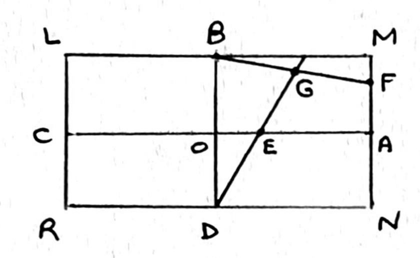
donc le a) entraîne :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{9}{25} MH^2 \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{3}{5}.$$

Γ sera l'ellipse de foyer O, de directrice D et d'excentricité $\frac{3}{5}$.

Objectif : retrouver et utiliser la déf. d'une conique par foyer et directrice. exprimer des distances en fct des coordonnées.

① Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle (réf. Repères n° 6 de jan. 92).



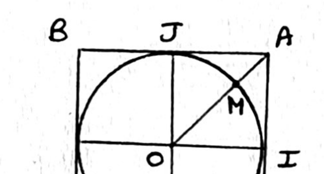
E et F sont resp. sur les segments [OA] et [MA] et vérifient $\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$.

Mq G est sur l'ellipse inscrite dans le rectangle LMNR.

Obj. : Recherche d'équations (cart. ou param.) de droites, des coord. de l'∩ de 2 dtes et utilisation de l'éq. cart. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ d'une ellipse.

(T Conique)

② Construction d'une ellipse à l'aide de 8 points et 8 tangentes



Calculer $\frac{OM}{OA}$. Que dire de la dte (IJ) et de la tgte au cercle $\mathcal{C}$ en M ?

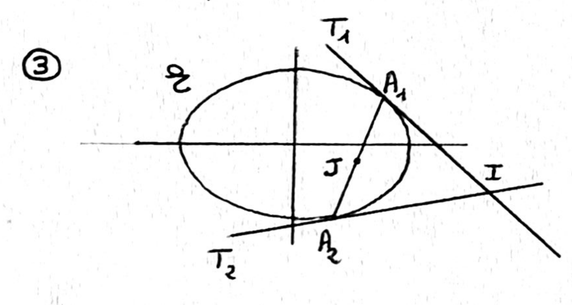
Application : Construire une ellipse à l'aide de 8 points et 8 tgtes.

Obj : Mettre en oeuvre les règles du dessin en perspective
Mieux définir le tracé de l'ellipse

Contexte : utilisable dès la 3ème pour tracer un cône de révolution en perspective.

(T Coniques)

③



J est le milieu de $[A_1A_2]$, où A_1, A_2 désignent les pts de contact des tgtes T_1, T_2 à l'ellipse $\mathcal{E}$.
On suppose que T_1 coupe T_2 en I.
Mq $\mathcal{E}$ est invariante dans la sym. /à (IJ) // à (A_1A_2).

(Ind. Se ramener au cas du cercle par affinité orthogonale)

Sol : Capes 90, 2e comp., D.1.a, AG8

Obj : • Apprentissage de la démonstration - Savoir fractionner ce que l'on doit prouver, en envisageant d'abord le cas du cercle ici.
• Utiliser l'affinité transformant un cercle en une ellipse.

Contexte : ex. difficile à traiter en TP avec des ind. de recherche. On admettra que l'affinité conserve les milieux.

II Dérivée

Def | $f : A \subset \mathbb{R} \to \vec{E}$ $t_0 \in A$ et $\vec{\ell} \in \vec{E}$.
f est dérivable en t_0 de vecteur dérivée $\vec{\ell}$ ssi $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \vec{\ell}$
On note $f'(t_0) = \vec{\ell}$

Th | Si f est donnée par $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ orthonormée de $\vec{E}$, alors $\sim$ entre :
1) f dérivable en t_0 et $f'(t_0) = \vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$
2) $\forall i \in [1, n]$ f_i est dérivable en t_0 et $f_i'(t_0) = \ell_i$

preuve : cf théorème sur les limites.

Remarque : Comme pour les fcts numériques, on définit la fonction dérivée par
$f' : A \to \vec{E}$, $t \mapsto f'(t)$ et la dérivée n-ième par $f^{(n)}(t_0) = (f^{(n-1)})'(t_0)$

ex : $f(t) = 2t\vec{i} + (t^3+2t)\vec{j} + 5t^2\vec{k}$
$f'(t) = 2\vec{i} + (3t^2+2)\vec{j} + 10t\vec{k}$
$f''(t) = 6t\vec{j} + 10\vec{k}$
$f'''(t) = 6\vec{j}$
$f^{(4)}(t) = \vec{0}$

Propriétés :

Pro 1 | $t_0 \in \mathbb{R}$ f et g dérivables en t_0 $\Rightarrow \begin{cases} (f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \\ (\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0) \end{cases}$

(raisonner coord. par coord.)

Pro 2 | Soit $\varphi : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en t_0 et $f : A \to \vec{E}$ dérivable en t_0.
Alors $\varphi f : t \mapsto \varphi(t) f(t)$ est dérivable en t_0 et
$$(\varphi f)'(t_0) = \varphi'(t_0) f(t_0) + \varphi(t_0) f'(t_0)$$

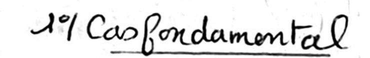
Pro 3 | $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} E$ et si φ est dérivable en t_0, et f en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et :
$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \underbrace{f'(\varphi(t_0))}_{\in \vec{E}} \cdot \underbrace{\varphi'(t_0)}_{\in \mathbb{R}}$$

Pro 4 | Si f et $g : A \to \vec{E}$ sont dérivables en t_0, alors $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et : $(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0)$

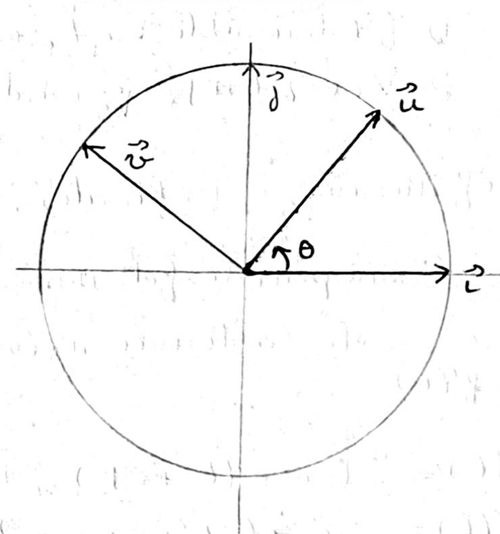
Tangentes

Définition : Notons $\mathcal{C} = \{M \in E \ / \ \vec{OM} = f(t)\}$. Si f est dérivable en t_0 et si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, alors $\mathcal{C}$ admet une tangente en $M_0(t_0)$ de vecteur directeur $f'(t_0)$.

III Application : tangentes aux coniques et aux hélices circulaires.



1°/ Cas fondamental



θ = mesure réelle de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

- Si θ est le paramètre réel :

$\vec{u} = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}$

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = u'(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{j}$$

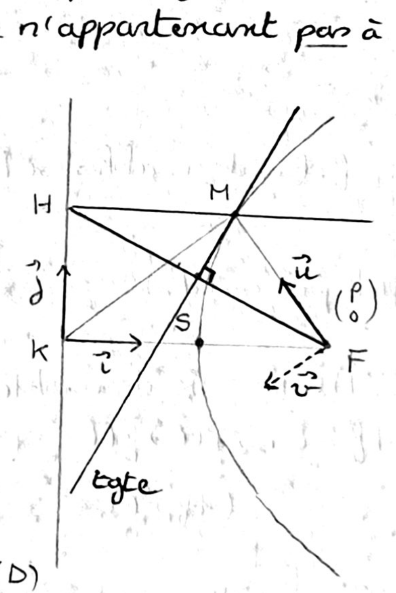
- Si θ est fonction de t :

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}'(\theta) \times \theta'(t) = \theta' . \vec{v}$$

2°/ Tgte en un point d'une conique

a) **Parabole**

C'est l'ensemble des points à égale distance d'un point fixe nommé "foyer" et d'une droite fixe nommée "directrice", le point fixe n'appartenant pas à la droite fixe.



Soit $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$ mesuré par $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $\vec{FM} = r\vec{u}$ avec $r = f(\theta) > 0$

d'où :

(1) $\vec{FM}' = r'\vec{u} + r\vec{v}$ où $\vec{v} = \vec{u}'(\theta)$ est le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}$.

(2) $\vec{KM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donne le même vecteur dérivée (cf. $\vec{KM} = \underbrace{\vec{KF}}_{\text{fixe}} + \vec{FM}$)

Donc

$(\vec{KM})' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

Comme $HM = MF$, on a : $x = r \Rightarrow \vec{KM}' = r'\vec{i} + y'\vec{j}$ (2')

(1) et (2') donnent :

$$\vec{FM}' = \boxed{r'\vec{u}} + r\vec{v} = \boxed{r'\vec{i}} + y'\vec{j}$$

Les vecteurs entourés sont les proj. orth. de $\vec{FM}'$ sur les droites (MF) et KF. Ils ont

...ne longueur. Par suite :

> Le vecteur dérivé appartient à la droite bissectrice de l'angle $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$.

NB :
On en déduit la construction de la parabole par points et tangentes successives.

Remarque : (1) $\overrightarrow{FM}'=r'\vec{u}+r\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{FM}'\neq\vec{0}$ car $r\neq 0$ et $r\vec{v}$ est la proj. orthogonale de $\overrightarrow{FM}'$ sur $(\vec{v})$. Donc la parabole admet bien une tangente en chacun de ses points.

b) Ellipse

$r_1+r_2=2a$ avec $c<a$

$\begin{cases} r_1>0 \ / \ \overrightarrow{F_1M}=r_1\vec{u}_1 \text{ et } mes(\vec{\imath},\vec{u}_1)=\theta_1 \\ r_2>0 \ / \ \overrightarrow{F_2M}=r_2\vec{u}_2 \text{ et } mes(\vec{\imath},\vec{u}_2)=\theta_2 \end{cases}$

$\vec{u}_2$ $\vec{u}_1$ M T tgte $\vec{\jmath}$ θ_1 θ_2 F_1 2c $\vec{\imath}$ F_2

θ_1 et θ_2 dépendent de t, par exemple.

On a : $\begin{cases} (\overrightarrow{F_1M})'(t)=r_1'\vec{u}_1+r_1\vec{v}_1\,\theta_1'(t) & \text{où } \vec{v}_1=\vec{u}_1'(\theta_1) & (1) \\ (\overrightarrow{F_2M})'(t)=r_2'\vec{u}_2+r_2\vec{v}_2\,\theta_2'(t) & \text{où } \vec{v}_2=\vec{u}_2'(\theta_2) & (2) \end{cases}$

On a l'égalité entre ces 2 vecteurs dérivées. De plus, ils ne sont pas nuls car si on prend θ = fct croissante de t, $\theta_1'(t)>0$ et $r_1>0$, $\vec{v}_2\neq\vec{0} \Rightarrow$ projection orth. de $(\overrightarrow{F_1M})'(t)$ sur $(\vec{v}_1)$ est non nulle.

D'où : $(\overrightarrow{F_1M})'(t)=r_1'\vec{u}_1+r_1\vec{v}_1\theta_1'=r_2'\vec{u}_2+r_2\vec{v}_2\theta_2'$

D'autre part, $r_1+r_2=2a \Rightarrow r_1'=-r_2'$ d'où

$$(\overrightarrow{F_1M})'(t)=r_1'\vec{u}_1+r_1\vec{v}_1\theta_1'=r_1'(-\vec{u}_2)+r_2\vec{v}_2\theta_2'$$

Les vecteurs entourés sont les proj. orth. de $(\overrightarrow{F_1M})'(t)$ sur $\vec{u}_1$ (resp. $(-\vec{u}_2)$). Par suite :

Res
> La tangente en M à l'ellipse de foyers (F_1,F_2) est la bissectrice de l'angle extérieur au triangle MF_1F_2

c) Hyperbole

C'est l'ensemble des $M\in P$ tels que $\begin{cases} |MF_1-MF_2|=2a \\ F_1F_2=2c \quad c>a \end{cases}$

Un calcul analogue à celui du b) donnerait le résultat :

> La tangente en M à l'hyperbole de foyers (F_1,F_2) est égale à bissectrice intérieure du triangle MF_1F_2

d) Hélice circulaire

C'est une courbe de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}_+^* \qquad (\text{en repère } (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \text{ orthonormé})$$

Notons (H) cette hélice.

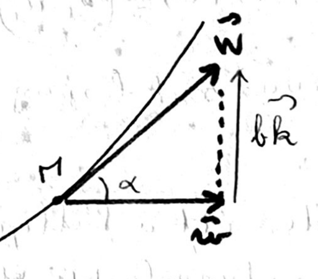
$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{OM}' = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}$

On remarque que, si m désigne le pt projection orth. de M sur $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $(\mathcal{C})$ le cercle de $(O,\vec{i},\vec{j})$ de centre O de rayon a, $\vec{w} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}$ est le vect. dir. de la tangente à m à $(\mathcal{C})$.

Par suite : $\vec{OM}' = \vec{w} + b\vec{k}$

donc $\vec{w}$ = projection orthogonale sur le plan de $(\mathcal{C})$ du vecteur $\vec{OM}'$.



NB : $tg\,\alpha = \frac{b}{a}$ $\forall M \in (H)$

NB : pas de l'hélice = distance entre 2 points consécutifs qui se trouve sur la même verticale.

Ainsi : $\left.\begin{array}{l} a\cos t = a\cos t' \\ a\sin t = a\sin t' \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \equiv t' \, [\pi]$

Entre 0 et 2π, la cote de $M(t)$ aura varié de $\boxed{z = b2\pi}$ (= pas p de l'hélice)